FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
كلية العلوم القانونية والإقتصادية والإجتماعية عين الشق
جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء

Filière : Sciences économiques et Gestion

Microéconomie II

La fonction de production

Pr. Adil MSADY

Année universitaire 2018/2019

Chapitre II : la théorie de la production : le calcul économique du producteur

La théorie traditionnelle, connu sous le nom de la théorie de la firme (ou encore le calcul économique du producteur), traite de la production réelle marchande.

L'entreprise est définie comme l'agent économique qui a pour fonction de produire des biens et services puis de les vendre sur un marché en réalisant un profit.

La démarche suivie pour le consommateur sera reproduite chez le producteur. En effet, de même que le consommateur maximise son utilité sous contrainte de revenu de même le producteur maximise son profit tout en se pliant à de multiples contraintes que sont à la fois les techniques de production existantes, les prix de marché auxquels il peut vendre sa production et les prix des facteurs de production : capital, travail, produit intermédiaires, terre…

L'acte de produire consiste à mettre en œuvre tous ces facteurs qu'on appelle inputs ou intrants, en utilisant la technique la plus appropriée, pour donner naissance à une production qu'on appelle output ou extrant destinée non pas à satisfaire l'entreprise, mais à être vendue sur le marché. La relation entre les inputs et les outputs est une fonction de production.

L'entreprise se trouve donc face à de multiples options techniques parmi lesquelles elle devra choisir. Cependant, l'objectif de l'entreprise n'est pas la maximisation de la production mais du profit. Par conséquent, l'analyse technique de la production doit être suivie de l'analyse économique en terme du coût et de l'analyse commerciale en terme du profit.

Section 1 : la fonction de production

1- Les hypothèses de base

Pour simplifier le raisonnement et pour ne pas embrasser la réalité dans toute sa complexité, il est indispensable d'introduire quelques hypothèses simplificatrices.

H_1 : l'entreprise ne produit qu'un seul bien ;

H_2 : la distinction est faite entre la courte période et la longue période.

- La courte période : ne désigne pas un temps déterminé (l'année, mois, …), mais une période de temps abstraite durant laquelle les structures de production restent inchangées. Cette hypothèse signifie que tous les facteurs de production ne changent pas en même temps ;
- La longue période : les inputs deviennent variables. La question que cherche à résoudre la théorie du producteur est de chercher la combinaison de facteurs qui permettent de maximiser le profit.

2- Analyse de courte période : la fonction de production à un facteur variable :

- **<u>L'analyse empirique</u>**

Application

Pour déterminer la forme de la fonction de production, considérons un petit atelier disposant des équipements de production que l'on suppose constant. La production de cet atelier variera donc suivant le nombre de travailleurs utilisés.

Soit : K désigne les équipements de production (le capital) ;

T désigne le nombre de travailleurs (le travail).

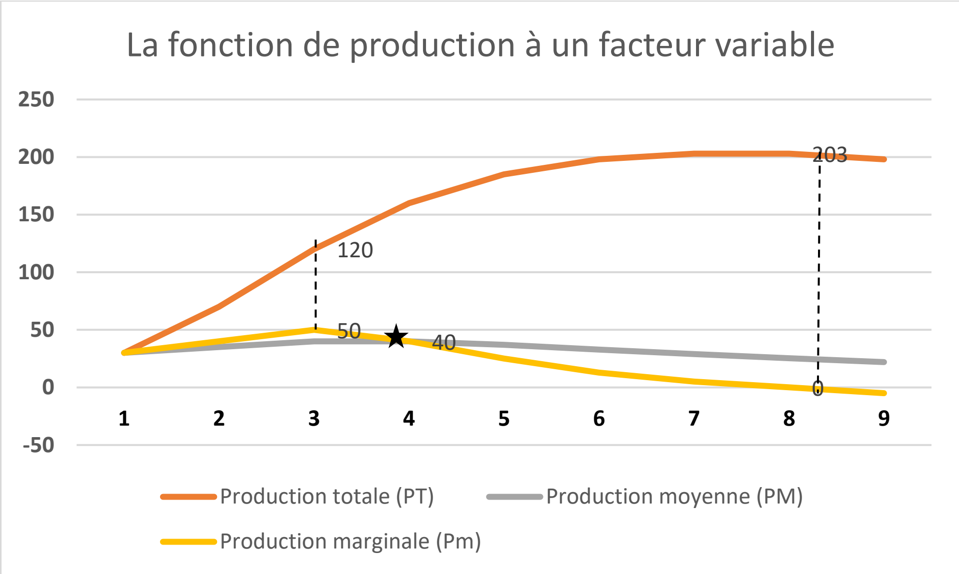
Le tableau suivant résume les valeurs de production de cet atelier :

Nombre de travailleurs T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Production totale (PT)	30	70	120	160	185	198	203	203	198
Production moyenne (PM)	30	35	40	40	37	33	29	25,3	22
Production marginale (Pm)	30	40	50	40	25	13	5	0	-5

D'après ce tableau on constate que :

- Le nombre d'ouvriers augmente, la production totale augmente aussi jusqu'au $8^{ème}$ ouvrier où on remarque la production totale à rester stable (ce travailleur supplémentaire « le $8^{ème}$ » n'a plus de tache précise à accomplir).
  - ⇨ Justification : puisque le capital technique est constant, la hausse du travail déséquilibre le rapport technique optimal entre les deux facteurs fixe et variable.

- A partir de l'embauche du 8ème ouvrier la production totale diminue.
  - ⇨ Justification : le dernier ouvrier (8ème) embauché n'a rien à faire, et pourrait gêner les autres travailleurs.



⇨ Commentaire :

- Lorsque la production totale atteint son maximum, la productivité marginale devient nulle ;
- Le point d'intersection entre la courbe de productivité marginale et la courbe de la productivité moyenne constitue le maximum de cette dernière (la productivité moyenne est maximale quand elle est égale à la productivité marginale);
- La productivité marginale atteint son maximum lorsque la courbe de production totale passe par un point d'inflexion indiquant un changement de croissance d'un taux croissant à un taux décroissant.

- **<u>Formulation mathématique</u>**

A- <u>Définitions</u>

⇨ **La fonction de production** est définie comme une liaison fonctionnelle existant entre les quantités de biens produits (Q) et les quantités de facteurs utilisés K et T.

Production = Q = f (K,T)

K : c'est le facteur capital qui désigne l'outillage, les ateliers, les usines … ;

T : le facteur travail englobe l'ensemble de la main d'œuvre.

⇨ **La production totale (PT)** décrit, en fonction de la quantité de facteur variable (T) « sachant que le facteur capital est constant K=K_0 = Constante », l'évolution de la production.

$$PT = Q = f(K_0, T)$$

- ⇨ **La productivité moyenne (PM)** décrit, en fonction de la quantité de facteur variable (T), l'évolution de la contribution moyenne de ce facteur à la production. Elle est égale au rapport de la PT sur la quantité de facteur variable (T)

$$PM_T = f(T) = PT/T$$

- ⇨ **La productivité marginale (Pm_T)** décrit l'évolution du rapport de la variation de la production sur la variation de la quantité de facteur variable (T)

$$Pm_T = f(T) = \Delta PT/\Delta T$$

$$Pm_T = PT_n - PT_{(n-1)} / T_n - T_{n-1}$$

<u>Exercice d'application</u>

Une entreprise produit un bien à partir de deux facteurs, le capital (K) et le travail (T). La production totale (PT) de ce bien varie en fonction des unités de travail employées,
le facteur capital étant supposé fixe, ces variations sont retracées dans le tableau suivant :

Capital (K)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Unité de travail (T)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production totale (PT)	60	140	240	320	380	420	440	440	420	300
Productivité moyenne (PM)										
Productivité marginale (Pm)										

TAF :

- ➢ Calculer les productivités moyenne et marginale du travail

Solution :

- ➢ Calcul de la productivité moyenne (PM)

$$PM = PT/T$$

Pour T=1 PM=60/1= 60
Pour T=2 PM=140/2= 70
Pour T=3 PM=240/3= 80

- ➢ Calcul de la productivité marginale (Pm)

$$Pm = PT_n - PT_{n-1} / T_n - T_{n-1}$$

Pour T=1 Pm= ---
Pour T=2 Pm=140- 60/2-1= 80
Pour T=3 Pm=240-140/3-2= 100
Pour T=4 Pm=320-240/4-3= 80

Capital (K)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Unité de travail (T)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production totale (PT)	60	140	240	320	380	420	440	440	420	300
Productivité moyenne (PM)	**60**	**70**	**80**	80	76	70	62,8	55	46,6	30
Productivité marginale (Pm)	-	**80**	**100**	**80**	60	40	20	0	-20	-80

B- Relation entre les trois types de productivité : PT, PM et Pm

Les relations entre la production totale, la productivité moyenne et la productivité marginale peuvent se présentées comme suit :

- Lorsque la production totale atteint son maximum, la productivité marginale devient nulle :

$$PT' = Pm = 0$$

Démonstration :

PT= f (T) est maximale si PT'= f'(T) = 0

PT' = d PT/ d T = Pm

PT'=Pm=0

- La productivité moyenne est maximale quand elle est égale à la productivité marginale :

$$PM_{max} = Pm$$

Démonstration :

PM= PT/T est maximale si PM'=0

$PM' = (PT/T)' = (PT' \times T - T' \times PT) / T^2 = 0$

$PM' = (Pm \times T - PT) / T^2 = 0$

$PM' = (Pm \times T - PM \times T) / T^2 = 0$ avec $PM = PT/T \Leftrightarrow PT = PM \times T$

$PM' = (Pm - PM) / T \Rightarrow \mathbf{PM_{max} = Pm}$

- La productivité marginale atteint son maximum lorsque la courbe de production totale passe par un point d'inflexion indiquant un changement de croissance d'un taux croissant à un taux décroissant.

$$PT'' = Pm'$$

Trois cas son possible :

1- Pm' > 0 ou la productivité marginale croissante : **la production totale croissante à taux croissant** ;
2- Pm'= 0 ou la productivité marginale maximale : **la production totale croissante à taux constant** ;
3- Pm' < 0 ou productivité marginale décroissante : **la production totale croissante à taux décroissant.**

C- <u>Loi des rendements marginaux décroissant :</u>

La loi des rendements non proportionnels se lit facilement sur le graphique. La courbe de production totale croit au début de plus en plus vite (productivité marginale croissante) jusqu'au point d'inflexion qui coïncide avec le maximum de la productivité marginale (Pm_{max}) : c'est la phase **des rendements croissants.**

Au-delà de ce point d'inflexion qui correspond au maximum de la productivité marginale, la production totale croit toujours mais avec un taux décroissant (productivité marginale décroissante) : c'est la phase **des rendements décroissant**.

La croissance croissante puis décroissante (productivité marginale croissante puis décroissante) de la production totale illustre **la loi des rendements non proportionnels.**

Encadré 1

La loi des rendements non proportionnels formulée pour la première fois par Turgot pour la production agricole, établie ensuite par Ricardo dans sa théorie de la rente foncière, mais qui a une portée générale qui se formule dans les termes suivants.

Enoncé de la loi des rendements marginaux décroissants :

Si l'on accroit la quantité d'un facteur de production en combinaison avec d'autres facteurs maintenus constants, il existe un point au-delà duquel la PT va croitre à un rythme sans cesse décroissant

Remarque :

On parle souvent de la loi des rendements marginaux décroissants plutôt que de loi des rendements non proportionnels, car l'optimum du producteur ne peut être atteint que si la productivité marginale est décroissante.

D- <u>Les trois zones de production :</u>

L'évolution des trois productivités totale, moyenne et marginale met en évidence l'existence de trois zones de production. La première représente des rendements croissants et décroissants, la deuxième représente des rendements décroissants et la troisième des rendements négatifs.

Zone 1 : phase de rendements croissants et décroissants

Elle est située entre l'origine des axes et le maximum de la productivité moyenne. Dans cette phase l'augmentation du facteur variable (T) se traduit par une augmentation de la production totale. Cependant, le facteur fixe (K) est surabondant par rapport au facteur variable (T), donc le producteur rationnel doit éviter cette zone d'inefficience productive.

Zone 2 : phase des rendements décroissants

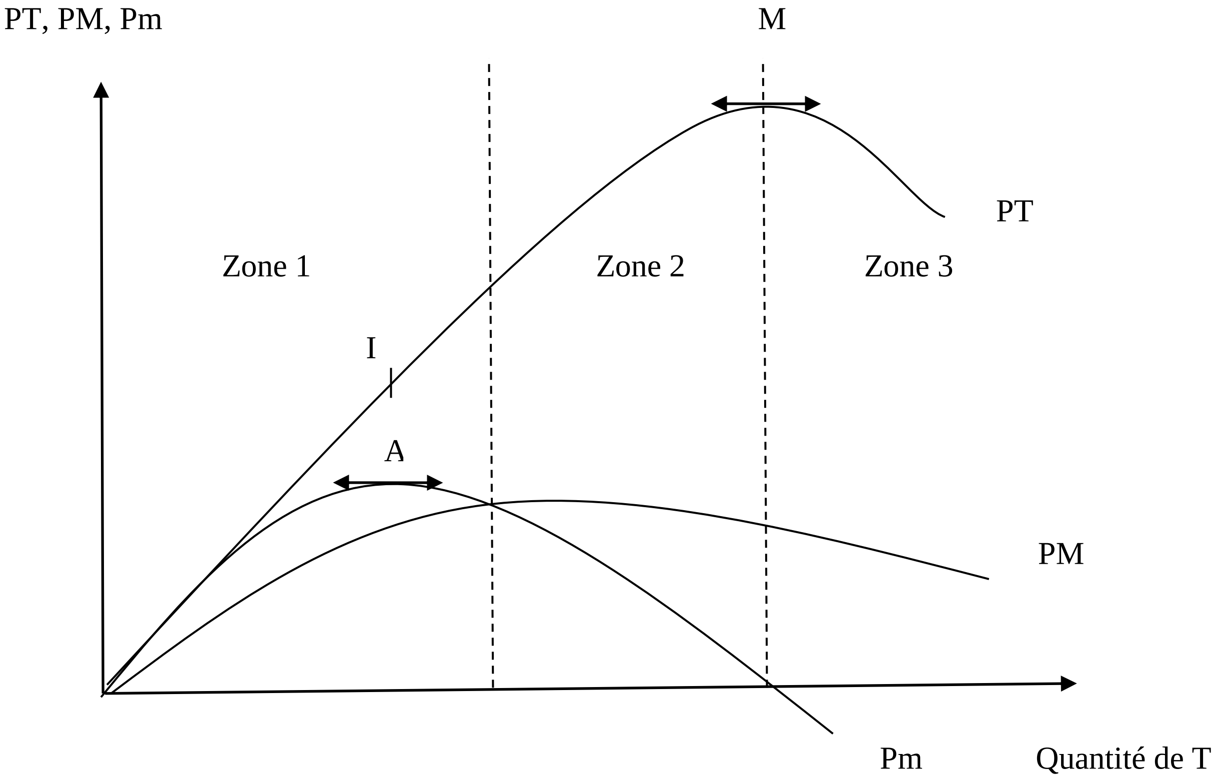
Délimitée par le maximum de la productivité moyenne et le maximum de la production totale ou productivité marginale nulle, cette zone se caractérise par la croissance décroissante de la production totale et la décroissance des productivités moyenne et marginale. C'est la zone où les facteurs de production sont combinés de façon efficiente. Le producteur peut maximiser son profit. **La zone 2 est donc la région économique du producteur ou la zone d'efficacité des facteurs.**

Zone 3 : phase des rendements négatifs

Cette zone se situe au-delà de Pm=0. Elle se caractérise par la décroissance de la production totale et de la productivité moyenne et par une productivité marginale du travail négative. En effet, le facteur travail est surabondant par rapport au facteur capital ce qui rend le travail de moins en moins efficace.

Remarque :

Les zones 1 et 3 correspondent à une utilisation inefficace des facteurs de production. Le producteur rationnel cherchant à maximiser son profit doit les éviter.



Exercice de synthèse :

A partir d'un équipement fixe, la quantité produite (P) évolue en fonction du nombre d'ouvriers (T), selon la relation technique suivante :

$P = - T^3 + 24\ T^2$

TAF :

1- Est-ce qu'il s'agit d'une fonction de production de courte ou de longue période ? justifier votre réponse ;
2- Déterminez les fonctions de la productivité moyenne et de la productivité marginale ;
3- Présentez les tableaux de variation des fonctions exprimant les produits du travail en précisant la PT_{max}, PM_{max} et Pm_{max} ;
4- Déterminez l'intervalle des valeurs du facteur travail qui permet de représenter le graphique des fonctions de production, sachant que la PT et la PM tendent vers zéro ;
5- Calculez les différentes valeurs des produits du travail qui correspond à la variabilité de facteur travail dans l'intervalle des valeurs de (T) ;

6- Représentez graphiquement les production totale, moyenne et marginale et délimitez les différentes zones de production.

Solution :

1- Il s’agit d’une fonction de courte période puisque le facteur capital supposé constant ;

2- Les fonctions de production :

$$\mathbf{PT = -T^3 + 24T^2}$$

$$\mathbf{PM = -T^2 + 24T}$$

$$\mathbf{Pm = -3T^2 + 48T}$$

3- Les tableaux de variations des fonctions de production :

La production totale :

T	0		16		$+\infty$
PT’= Pm	+		0		-
PT	0	↗	PT_{max}= 2048	↘	$-\infty$

La productivité moyenne :

T	0		12		$+\infty$
PM’	+		0		-
PM	0	↗	PM_{max}= 144	↘	$-\infty$

La productivité marginale :

T	0		8		$+\infty$
Pm’	+		0		-
Pm	0	↗	Pm_{max}= 192	↘	$-\infty$

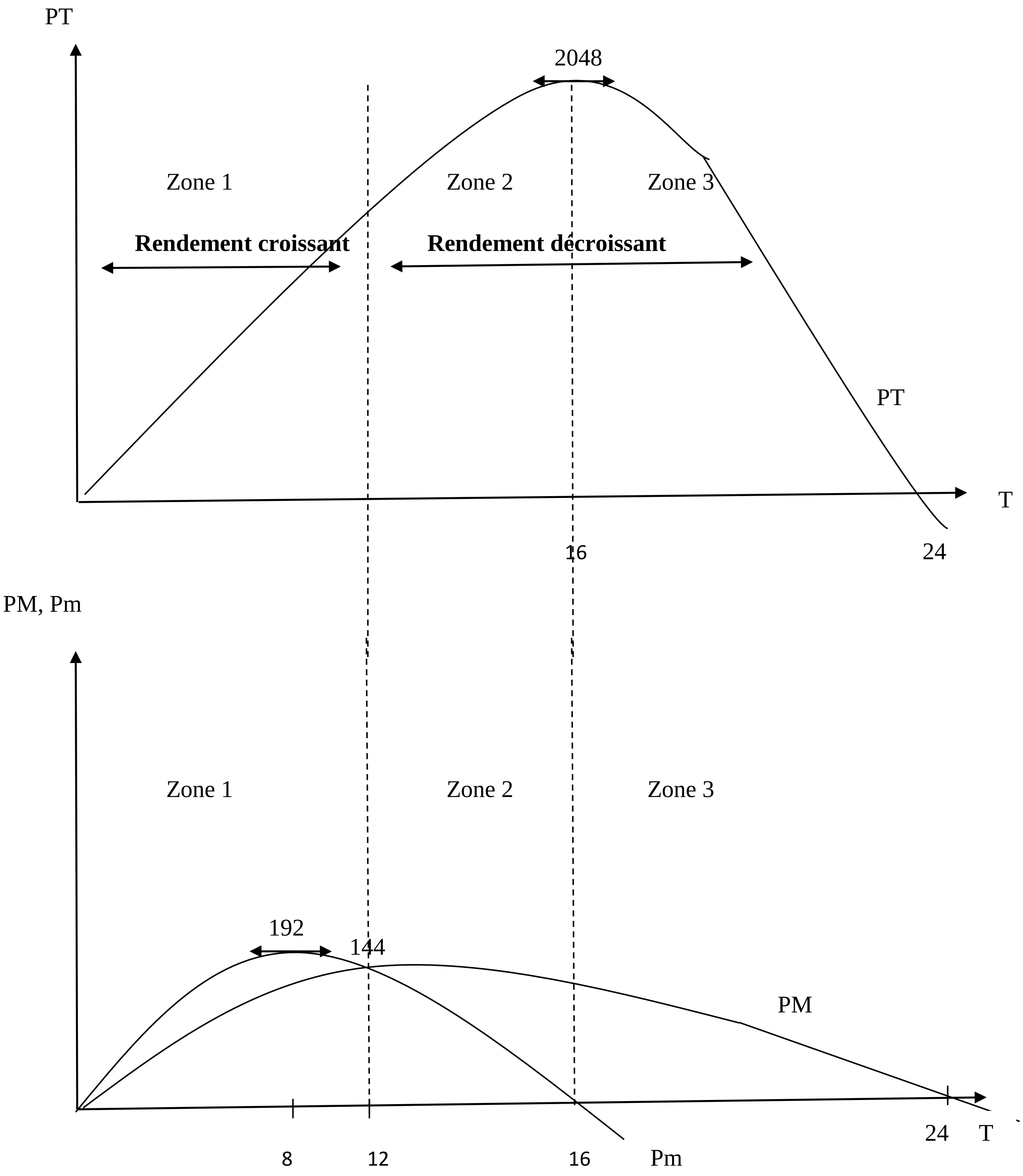
4- L'intervalle des valeurs du facteur travail qui permet de représenter le graphique des fonctions de production, sachant que la PT et la PM tendent vers zéro :

T= 0 ou **T=24 donc l'intervalle est [0 -24]**

5- Tableau des valeurs des différentes productions (PT, PM et Pm)

Combinaisons productives		Les fonctions de production		
Facteur capital K	Facteur travail T	PT	PM	Pm
1	0	0	0	0
1	1	23	23	45
1	2	88	44	84
1	3	189	63	117
1	4	320	80	144
1	5	475	95	165
1	6	648	108	180
1	7	833	119	189
1	8	1024	128	192
1	9	1215	135	189
1	10	1400	140	180
1	11	1573	143	165
1	12	1728	144	144
1	13	1859	143	117
1	14	1960	140	84
1	15	2025	135	48
1	16	2048	128	0
1	17	2023	119	-51
1	18	1944	108	-108
1	19	1805	95	-171
1	20	1600	80	-240
1	21	1323	63	-315
1	22	968	44	-396
1	23	529	23	-483
1	24	0	0	-576

6- La représentation graphique :



E- <u>Justification de l'efficacité des facteurs dans la zone 2 : élasticité partielle de la production</u>

L'élasticité partielle de la production est l'un des éléments qui peuvent justifier que les facteurs de production sont combinés de manière rationnelle dans la zone 2. Cette élasticité mesure la sensibilité de la production totale à une variation du facteur. Elle mesure l'accroissement en pourcentage de la production totale à la suite d'une variation d'un seul facteur de 1%.

$$e_{Q/L} = dQ/Q \;\;/\;\; dL/L$$

$$e_{Q/L} = dQ/dL \;\; x \;\; L/Q$$

ou

$$e_{Q/L} = Pm_L \;\;/\;\; PM_L$$

L'élasticité partielle de la production est donc égale au rapport entre la productivité marginale et la productivité moyenne du facteur travail (appelée aussi la productivité marginale technique et la productivité moyenne technique).

- **Dans la zone 1 : Pm > PM =>** $e_{Q/L} > 1$ car $e_{Q/L} = Pm_L \;/\; PM_L$
- ⇨ Toute augmentation de travail correspondra à une augmentation plus que proportionnelle de la production totale. Le facteur variable (travail) est sous-utilisé. L'entreprise a intérêt à utiliser davantage de travail.
- **Dans la zone 3 : Pm < 0 =>** $e_{Q/L} < 0$ car $e_{Q/L} = Pm_L \;/\; PM_L$
- ⇨ La production totale varie dans le sens inverse du facteur travail. L'augmentation de travail entraînera la diminution de la production totale car le facteur fixe (capital) est surutilisé.
- **Dans la zone 2 : Pm < PM =>** $e_{Q/L} < 1$ car $e_{Q/L} = Pm_L \;/\; PM_L$
- ⇨ Dans le point où **Pm = PM =>** $e_{Q/L} = 1$

  L'utilisation du travail est optimale mais en ce point l'utilisation du travail n'est pas maximale et la production totale peut être augmenter.
- ⇨ Dans le point où **Pm = 0 =>** $e_{Q/L} = 0$

  L'utilisation de travail est maximale, il n'est pas possible d'augmenter la production totale.

⇨ Les facteurs de production sont combinés de manière optimale entre

$e_{Q/L} = 0$ et $e_{Q/L} = 1$ c'est-à-dire entre **$PM_{max} = Pm$** et **$Pm=0$**

Exercice d'application

A partir d'un équipement fixe, la quantité produite (P) évolue en fonction du nombre d'ouvriers (T), selon la relation technique suivante :

$P = - T^3 + 24\ T^2$

T A F

1) Calculer l'élasticité partielle de production pour T= 2, T=12, T=13, T=16 et T=18 ;
2) Déduire les différentes zones de production ;

3) Déterminer algébriquement la zone où les facteurs de production sont combinés de façon efficiente (la région économique du producteur ou la zone d'efficacité des facteurs).

Solution

1) L'élasticité partielle de production et le rapport de la productivité marginale technique sur la productivité moyenne technique

$$e_{Q/L} = Pm_L \ / \ PM_L$$

$$\text{Pour } T=2 \Rightarrow e_{Q/L} = 54 \ / \ 26 = 2{,}0769$$

$$\text{Pour } T=12 \Rightarrow e_{Q/L} = 12 \ / \ 12 = 1$$

$$\text{Pour } T=13 \Rightarrow e_{Q/L} = 9 \ / \ 11 = 0{,}8181$$

$$\text{Pour } T=16 \Rightarrow e_{Q/L} = 0$$

$$\text{Pour } T=18 \Rightarrow e_{Q/L} = 6 \ / \ -6 = -1$$

2) On peut déduire les différentes zones de production ;

❖ Zone 1 : phase de rendements croissants et décroissants se situe entre T=0 et T=12 car l'élasticité dans cette zone est supérieure à 1

$$\mathbf{e_{Q/L} > 1}$$

❖ Zone 2 : phase des rendements décroissants se situe entre T=12 et T=16 car l'élasticité dans cette zone est bornée entre 0 et 1

$$\mathbf{0 < e_{Q/L} < 1}$$

- ❖ Zone 3 : phase des rendements négatifs se situe au-delà de T=16 car l'élasticité dans cette zone est négative

$$\mathbf{e_{Q/L} < 0}$$

3) La détermination algébrique de la zone d'efficacité des facteurs de production :

La zone de production économique se caractérise par une élasticité bornée entre 0 et 1

$$\mathbf{0 < e_{Q/L} < 1}$$

Sachant que :

$$e_{Q/L} = Pm_L \ / \ PM_L$$

Pour $e_{Q/L} = 1$ **T=12**

Pour $e_{Q/L} = 0$ **T=16**

Donc

- ❖ **La zone d'efficacité des facteurs se situe entre T=12 et T=16 car l'élasticité dans cette zone est bornée entre 0 et 1**

3- Analyse de longue période : la fonction de production à deux variables :

3-1 le choix du producteur :

Dans le cadre d'une analyse à long terme, on suppose que tous les facteurs de production peuvent varier. Il existe différentes méthodes de production selon la manière dont sont combinés les facteurs de production capital et travail. Choisir une méthode, c'est choisir la meilleure combinaison des facteurs de production pour produire le bien, en tenant compte des contraintes techniques et des contraintes proprement économique (limitation du budget dont dispose le producteur et prix des facteurs de production).

Soit une fonction de production **Q= PT= f (K,T) = f (K,L)**

Choisir la meilleure combinaison de facteurs revient à rechercher la quantité de facteur K* et T* à utiliser pour produire une quantité de bien donnée Q_0 au coût le plus bas.

Ça veut dire :

Minimiser la fonction du coût $CT= K.P_k + T.P_t$ ($CT= K.P_k + L.P_L$)
Sous contrainte de la quantité produite $Q_0 = f (K,T) = f (K,L)$

Ce problème de choix, pour le producteur, peut être énoncé également de la façon suivante : quelle est la combinaison optimale de facteurs de production pour produire la plus grande quantité de bien, étant donné que l'on dispose d'une contrainte budgétaire (on ne pourra dépenser plus qu'une somme donnée).

Ça veut dire :

Maximiser la fonction de production Q= f (K,T)

Sous contrainte du coût de production $C_0 = K.P_k + L.P_L$

Sachant que les prix des facteurs P_k et P_L sont constants.

Ces deux démarches (minimiser le coût sous contrainte de quantité ou maximiser la quantité sous contrainte de coût) sont identiques.

Cependant, avant de pouvoir résoudre ce problème du choix optimal, il nous faudra présenter un certain nombre d'outils analytiques, c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

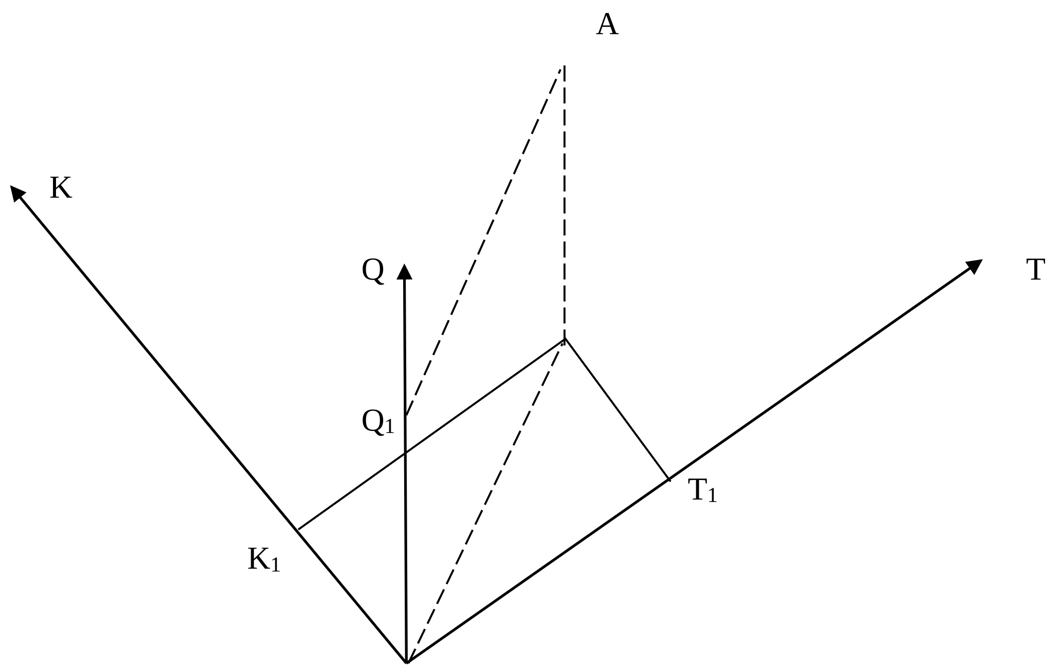
3-2 la notion d'isoquante : de la surface de production aux isoquantes

3-2-1 la surface de production

Dans la section précédente (l'analyse de courte période), il a été possible de faire les représentations graphiques des courbes de production totale, productivité moyenne physique et productivité marginale physique sans difficulté. Chacune de ces fonctions ne dépendait que d'une seule variable : le facteur travail T. si nous considérons maintenant que les deux facteurs K et T varient simultanément, il faudra un graphique à trois dimensions pour décrire la fonction de production.

$$Q= f(K,T)$$

Le point de production avec deux facteurs variables



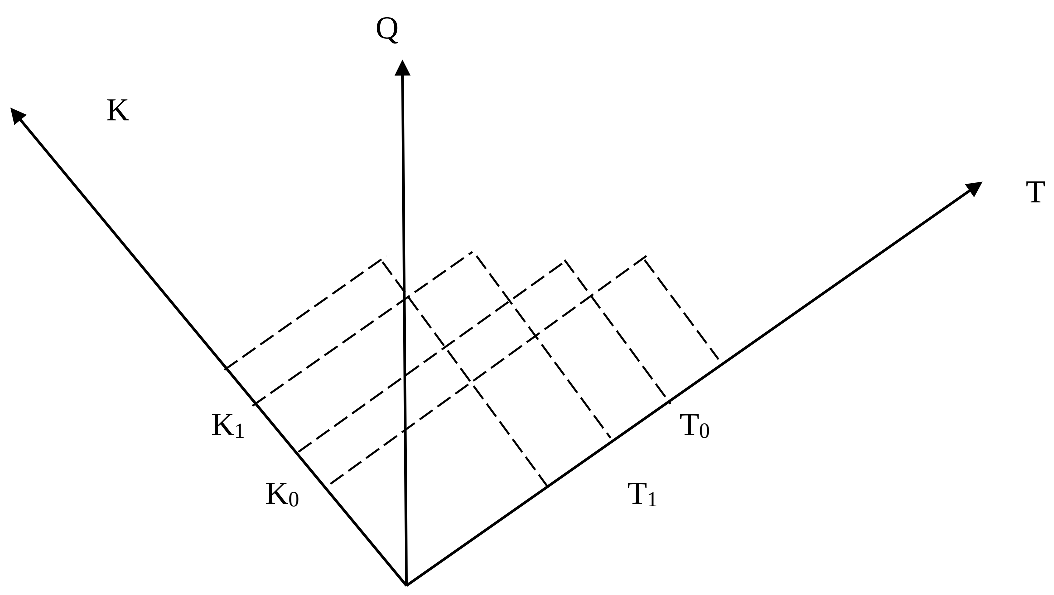
Ainsi avec K_1 unités de facteur K, et T_1 unités de facteur T, on peut produire Q_1 unités de bien, de telle façon que :

$$\mathbf{Q_1 = f\ (K= K_1\ ,\ T=T_1)}$$

On peut représenter un point (A) dans un graphique à trois dimensions qui est l'image du **triplet K_1, T_1, Q_1.**

Il existe une infinité de points qui peuvent être obtenus de la même façon que le point A. l'ensemble de tous ces points forme la surface de production.

La surface de production



Pour avoir une idée plus précise de cette surface, il suffit de se souvenir que l'intersection de cette surface avec un plan perpendiculaire au plan de base et à l'un des axes sera une courbe de production totale d'un des facteurs de production (capital K ou travail T).

Pour des raisons pédagogiques et puisqu'il est difficile de travailler avec un graphique à trois dimensions, on va trouver dans ce qui suit du cour une représentation graphique plus opérationnelle.

3-2-2 la notion d'isoquante

A- Définition

Une isoquante (appelée aussi courbe d'isoproduit) est le lieu des points représentatifs des combinaisons de facteurs capital (K) et travail (T) aboutissant au même niveau de production.

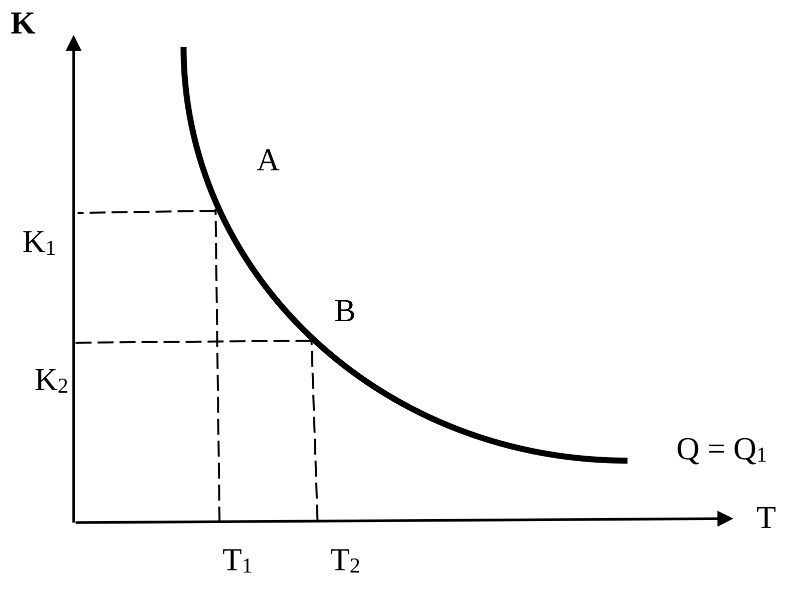
B- Représentation graphique

Pour la représentation graphique de l'isoquante, donnons-nous un système d'axes. Sur l'axe vertical, on mesure les quantités de facteur K. sur l'axe horizontal, on mesure les quantités de facteur T.

Donnons-nous une combinaison de facteur K et T. soit K_1 la quantité de facteur K, et T_1 la quantité de facteur T, de telle sorte qu'à l'aide de ces deux facteurs, on puisse produire une quantité Q_1 de bien.

$$\mathbf{Q_1 = f\ (K=K_1,\ T=T_1)}$$

<u>L'isoquante</u>



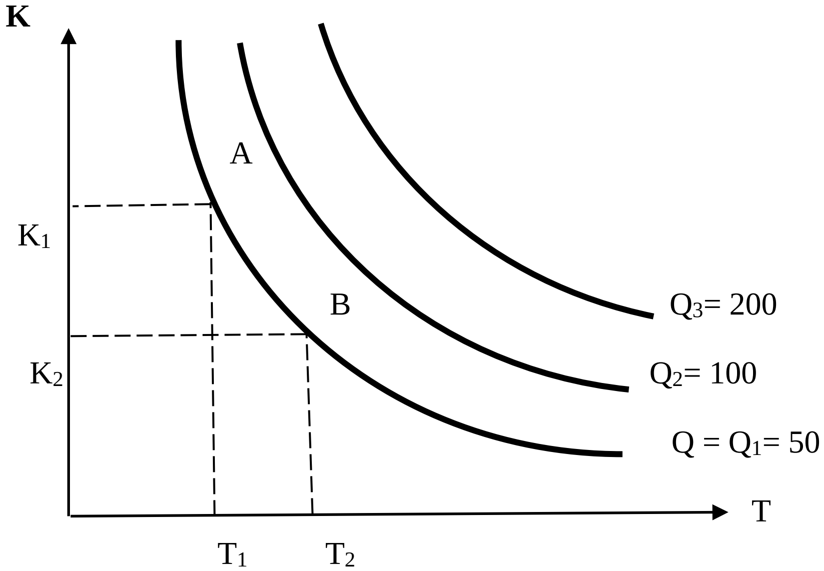
Le point A est l'image de couple $K=K_1$, $T=T_1$

On peut trouver une autre combinaison des facteurs K et T, qui nous donne la même quantité produite, soit **K_2 et T_2, ces valeurs, et B leur image dans le graphique précédent**

$$\mathbf{Q_1 = f\ (K=K_2,\ T=T_2)}$$

Un même niveau de production Q_1 peut être obtenu avec deux techniques différentes : une technique **très capitalistique** A (K_1, T_1) et une technique **peu capitalistique** B (K_2, T_2) utilisant beaucoup de main d'œuvre.
De la même façon que Q_1, il est possible de représenter différents niveaux d'output correspondant à des combinaisons de K et T. on obtiendrait ainsi une série d'isoquantes ou **une carte d'isoquantes**.
Ainsi, considérons une fonction de production de la forme Q=f (K,T)=K.T, cette fonction peut être représentée par une carte d'isoquantes.

<u>**Carte d'isoquantes**</u>



Remarque :

La courbe d'isoquante se caractérise par :

- Une pente négative qui exprime l'idée de substitution possible entre les facteurs de production (la diminution d'un facteur doit être nécessairement compensée par l'augmentation de l'autre facteur pour garder le même niveau de production);
- La convexité de cette courbe à l'origine exprime le phénomène du taux marginal de substitution technique décroissant, car en renonçant à un facteur sa productivité marginale augmente, ce qui nécessite des quantités de plus en plus croissantes de l'autre facteur pour garder la même production.

3-3 le taux marginal de substitution technique

A- Définition

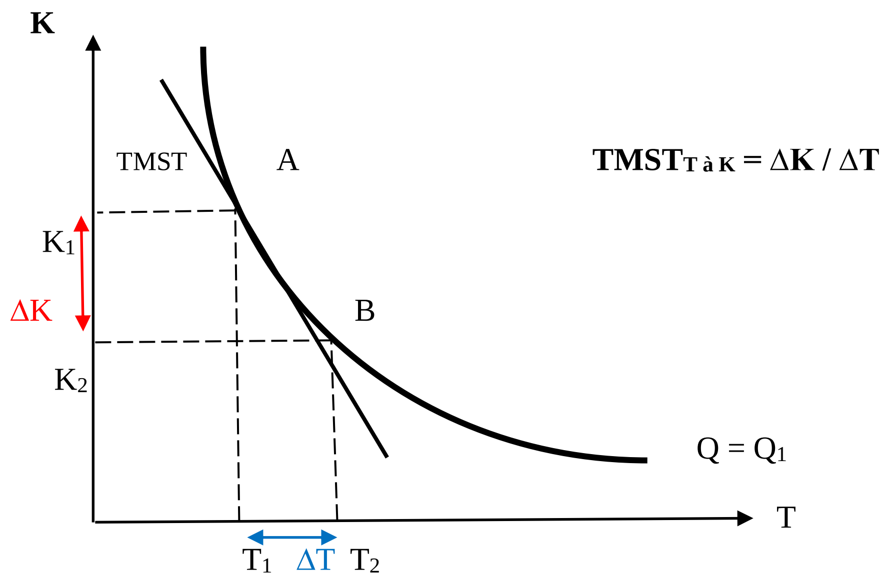
Le taux marginal de substitution technique (TMST) mesure le nombre d'unités d'un facteur de production que l'on doit ajouter, ou retrancher, **afin de maintenir le niveau de production constant**, après avoir retranché, ou ajouté, une unité de l'autre facteur de production.

En d'autres termes, le TMST de T à K ($TMST_{TK}$) désigne le montant de K qu'une entreprise est prête à céder pour obtenir une unité supplémentaire de T tout en gardant le même niveau de production (tout en restant sur la même courbe d'isoquante).

$$\mathbf{TMST_{T\,à\,K} = \Delta K / \Delta T}$$

Graphiquement le TMST est représenté par la pente de la tangente en un point sur l'isoquante.

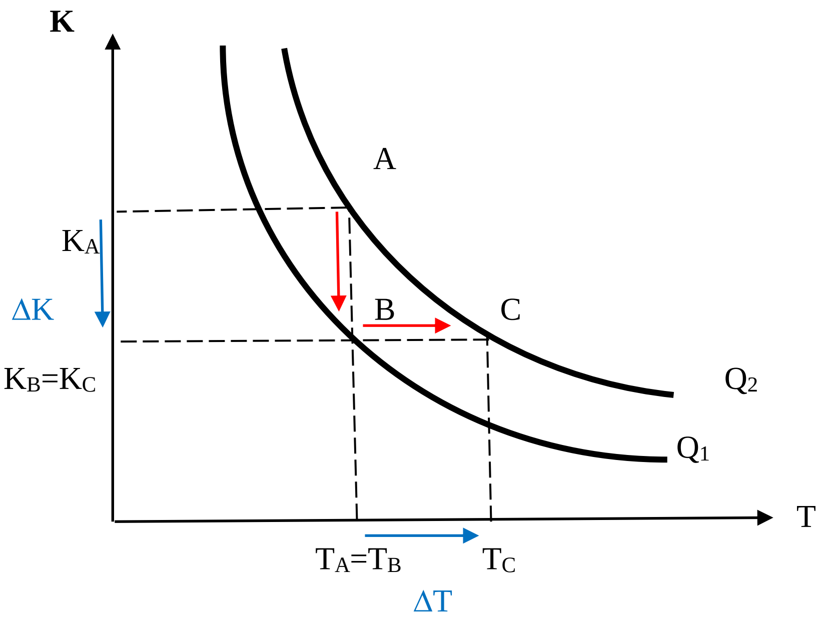
Le taux marginal de substitution technique



B- Liaison entre le taux marginal de substitution technique et la productivité marginal

La relation entre le TMST et la Pm des facteurs de production peut être dégagée à partir du graphique suivant :

La relation entre TMST et Pm des facteurs de productions



- En passant de A à C sur l'isoquante Q_2 , le niveau de production reste constant, mais K diminue et T augmente, c'est le phénomène de substitution des facteurs de production

$$\mathbf{TMST_{T\ à\ k} = \Delta K / \Delta T}$$

- En passant de A à B, T est resté constant, la diminution de K a engendré une diminution de la production qui est passée de Q_2 vers Q_1

$$\mathbf{\Delta Q = Pm_K \cdot \Delta K}$$

- En passant de B à C, K est resté constant, l'augmentation de T a engendré une augmentation du niveau de production qui est passée de Q_1 vers Q_2

$$\mathbf{\Delta Q = Pm_T \cdot \Delta T}$$

- En passant de A à C la production reste constante, par conséquent, on peut écrire :

$$\mathbf{Pm_K \cdot \Delta K + Pm_T \cdot \Delta T = 0 \text{ car } \Delta Q = 0}$$

Donc

$$\mathbf{\Delta K / \Delta T = - Pm_T / Pm_K}$$

$$\mathbf{TMST_{T\ à\ k} = - Pm_T / Pm_K}$$

En effet le TMST est le rapport négatif des productivités marginales des facteurs K et T.

3-4 la droite d'isocoût

Après avoir présenté les courbes isoquantes qui décrivent les possibilités de production. Nous allons introduire la contrainte des coûts de production.

Soit : P_k le prix du facteur K et P_T le prix du facteur T, le coût de production s'écrit ainsi :

$$\mathbf{CT = K.P_K + T.P_T}$$

K $.P_K$ représente la dépense de l'entreprise à l'achat du facteur K

T $.P_T$ représente la dépense de l'entreprise à l'achat du facteur T

A partir de la fonction du coût de production on peut déduire l'équation de l'isocoût

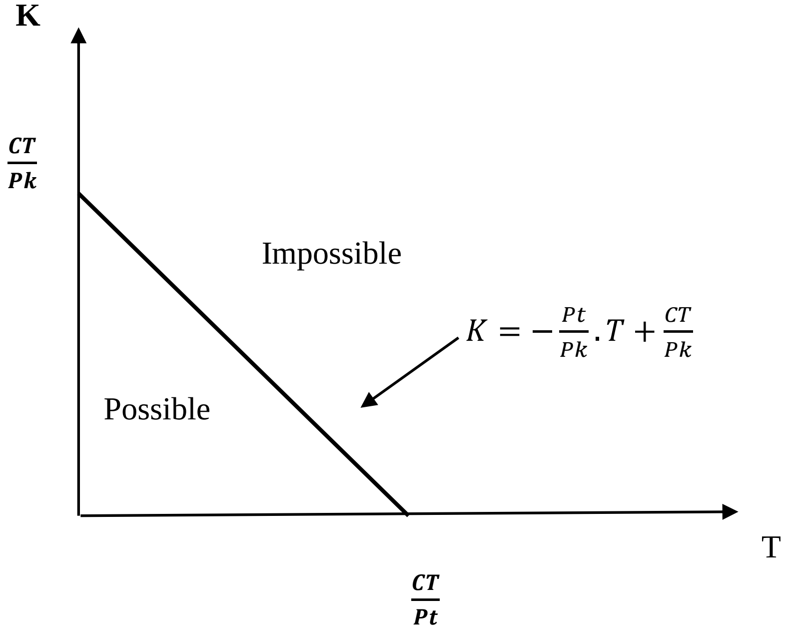
$$CT = K.P_K + T.P_T$$

$$K.P_K = CT - T.P_T$$

$$K = -\frac{Pt}{Pk}.T + \frac{CT}{Pk}$$

Si les prix des facteurs sont constants, la contrainte sera représentée par une droite dont la pente est $\boldsymbol{-\frac{Pt}{Pk}.T}$**,** l'ordonnée à l'origine est $\boldsymbol{\frac{CT}{Pk}}$ et l'abscisse à l'origine est $\boldsymbol{\frac{CT}{Pt}}$

<u>La représentation graphique de la droite d'isocoût</u>



Définition

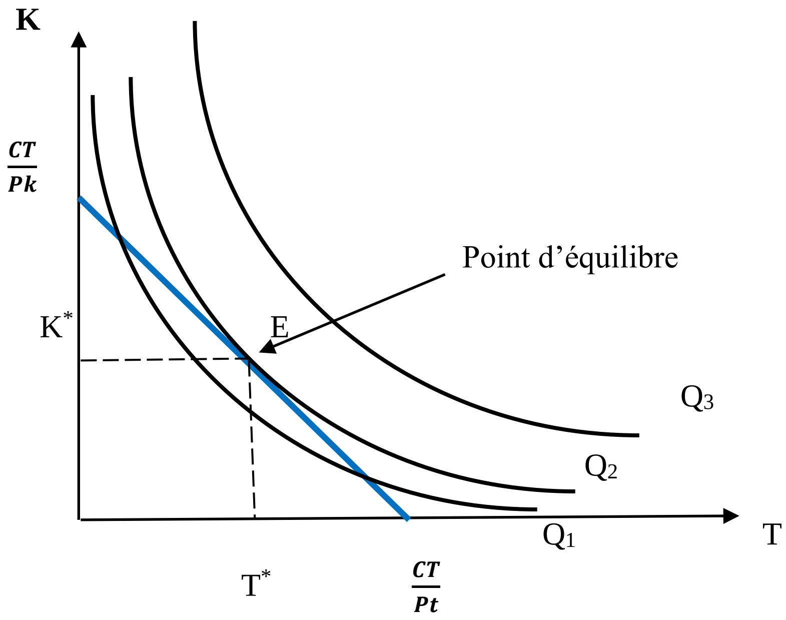
La droite d'isocoût est le lieu des points représentatifs des quantités des facteurs capital et travail correspondant à un même niveau de coût total. Si le coût total varie alors que les prix des facteurs sont maintenus constants, cette droite se déplace parallèlement à elle-même vers la droite si le coût total augmente, et elle se déplace vers la gauche si le coût total diminue.

3-5 la détermination de la production optimale

Il s'agit de déterminer la combinaison optimale des facteurs, c'est-à-dire celle qui maximise la quantité produite sous la contrainte de coût.

3-5-1 La détermination graphique de l'optimum

L'optimum de choix du producteur



Remarque

On constate que graphiquement l'équilibre (optimum) du producteur est obtenu au point tangence entre la droite d'isocoût et une isoquante.

En ce point de tangence , la pente de la droite est $-\frac{Pt}{Pk}$ est identique à celle de la pente de TMST qui est $-\frac{Pmt}{Pmk}$

Donc $$\textbf{TMST} = -\frac{Pmt}{Pmk} = -\frac{Pt}{Pk}$$

3-5-1 La détermination algébrique de l'optimum

La recherche d'une méthode de production optimale se résume à un problème de maximisation sous-contrainte. Nous donnons la démonstration algébrique de la condition d'un plan optimale de production.

- Soit Q = f (K, T) la fonction de production continue et dérivable en tout point.
- Soit CT = $K.P_k + T.P_T$ la fonction de coût (la fonction contrainte) est la dépense totale du producteur, et où les prix des facteurs de production P_k et P_t sont constants.

L'optimum du producteur (minimiser le coût se contrainte de production) à partir de la méthode du multiplicateur de la grange se présente comme suit :

$L = K.P_K + T.P_T + \lambda (P - f (K,T))$

$L'k = Pk - \lambda \frac{df}{dk} = 0$ => $P_K = \lambda .Pm_K$ => $\mathbf{\lambda = P_K / Pm_K}$ **(1)**

$L't = Pt - \lambda \frac{df}{dt} = 0$ => $P_T = \lambda .Pm_T$ => $\mathbf{\lambda = P_T / Pm_T}$ **(2)**

$\mathbf{L'_\lambda = P - f (K,T)= 0}$ **(3)**

De (1) et (2) on obtient

$\boldsymbol{\lambda = \frac{Pk}{Pmk} = \frac{Pt}{Pmt}}$ ou bien $\boldsymbol{\frac{Pmt}{Pmk} = \frac{Pt}{Pk}}$

Ce résultat constitue **le théorème fondamental de la théorie de production** :

L'allocation optimale du coût de production entre les facteurs est atteinte lorsque la productivité marginale de chaque facteur est la même par unité monétaire dépensée sur chacun des facteurs

Synthèse

A l'optimum, le TMST doit être égale au rapport des prix $\boldsymbol{TMST = \frac{Pmt}{Pmk} = \frac{Pt}{Pk}}$

Exercice de synthèse

Soit la fonction de production P = 10.K.T où P désigne l'output, K, le capital et T le travail.

TAF

1) Déterminer la fonction représentative de la courbe d'isoproduit pour une production de 200 et une production de 500 ;
2) Sachant que les prix des facteurs sont respectivement $P_k = 2$ pour le capital et $P_T = 4$ pour le travail :
   - Déterminer la combinaison K,T que l'entrepreneur devra choisir pour obtenir une production de 500 ;
   - Quel est le cout de cette production ?
   - Calculer le $TMST_{T/K}$ du travail au capital pour ce niveau de production et donner sa signification économique ;
   - Déterminer l'équation représentative de la droite d'isocoût ;
   - Représenter graphiquement l'équilibre du producteur.

Solution

1) **La fonction d'isoquante**

   La fonction d'isoquante est **K= P/10T**

   Avec une production de 200 la fonction d'isoquante devient

   K=20/T

   Avec une production de 500 la fonction d'isoquante devient

   K=50/T

2) **La combinaison K,T qui permet au producteur d'avoir une production de 500**

   On a P_K= 2 et P_T = 4 et P=500

   Méthode de multiplicateur de Lagrange

   T= 5 et K= 10

   Le coût de production

   CT=40

   Le $TMST_{T/K}$ du travail au capital pour ce niveau de production

   $TMST_{T/K}$ = 2

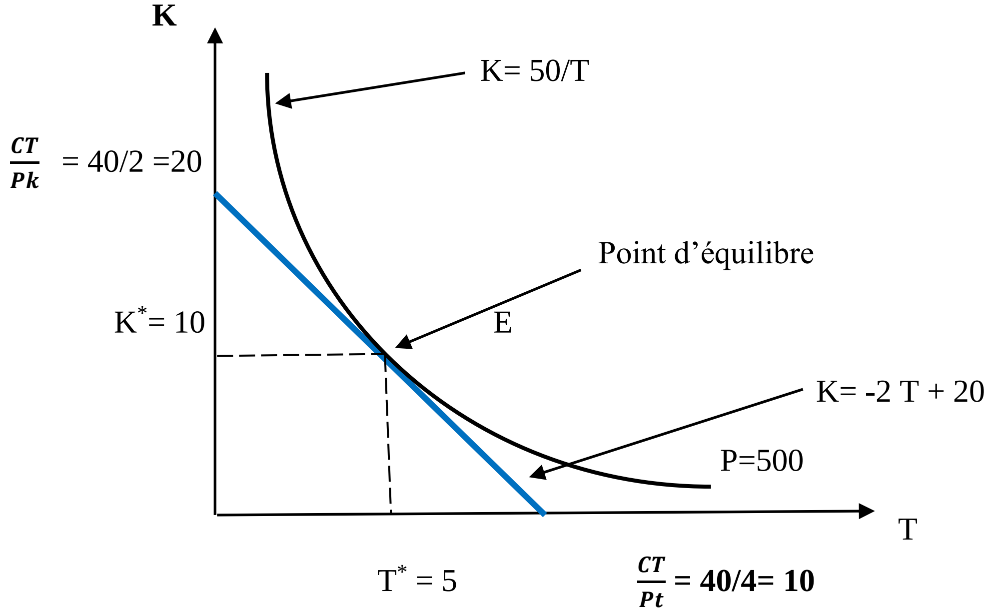
   Signification économique

   $TMST_{T/K}$ = 2 signifie que 2unités de capital remplace une unité du travail ou une unité de travail se substitue à 2 unités du capital.

L'équation représentative de la droite d'isocoût

$$K = -2.T + 20$$

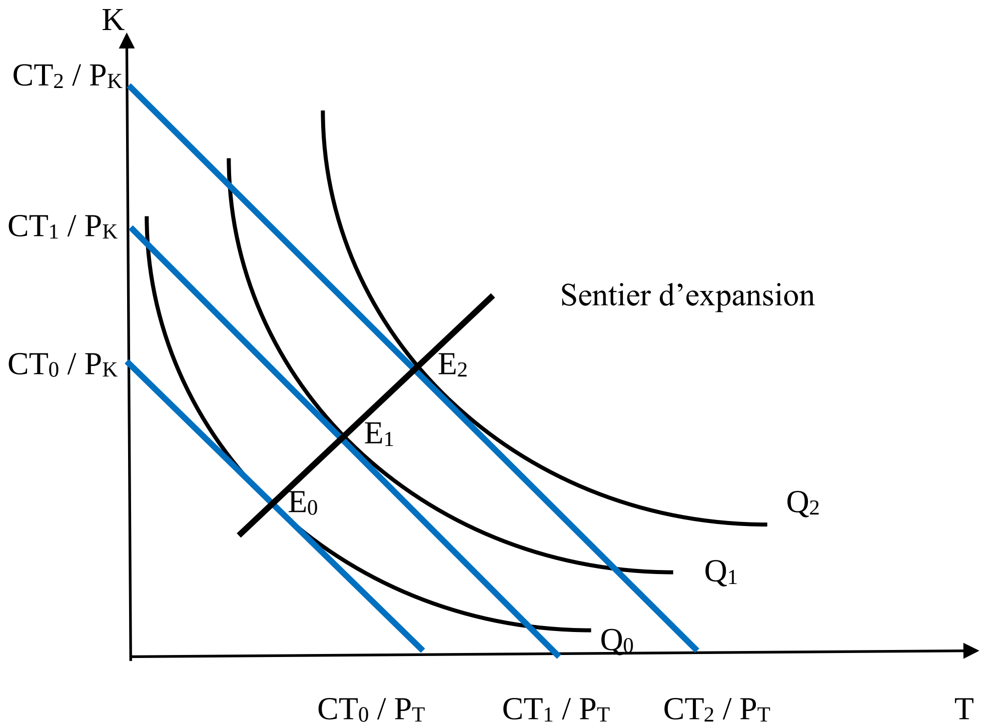
La représentation graphique de l'optimum du producteur



3-6 la notion du sentier d'expansion

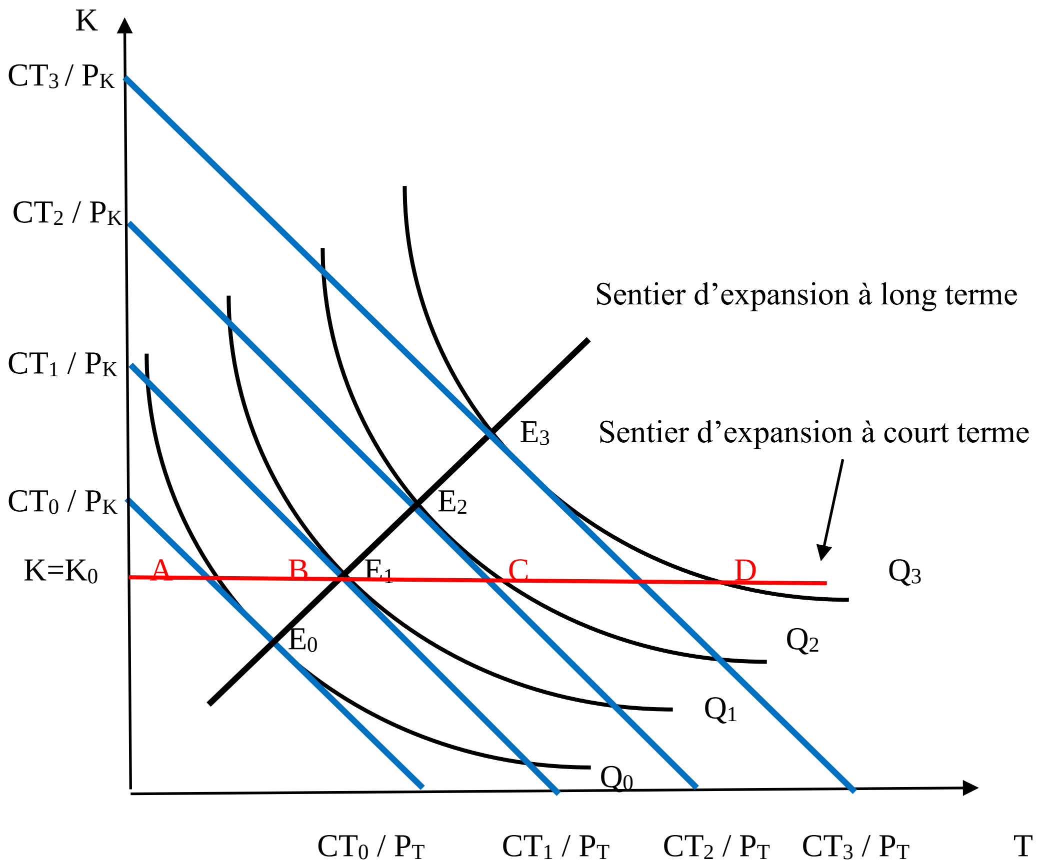
3-6-1 définition :

Le sentier d'expansion est le lieu des points qui constituent l'optimum du producteur dans la production d'un bien. Graphiquement, le sentier d'expansion est le lieu des points de tangence entre isoquantes et isocoûts.



3-6-2 le sentier d'expansion à court et à long terme :

- A court terme le facteur capital K est fixe ($K= K_0$), donc le sentier d'expansion est une droite parallèle avec l'axe des abscisses ;
- A long terme le sentier d'expansion est une droite qui passe de l'origine de repère ;
- Les deux sentiers d'expansion (à court et à long terme) coïncident dans un point d'optimum où on a une égalité de production et de coût pour le court et le long terme.



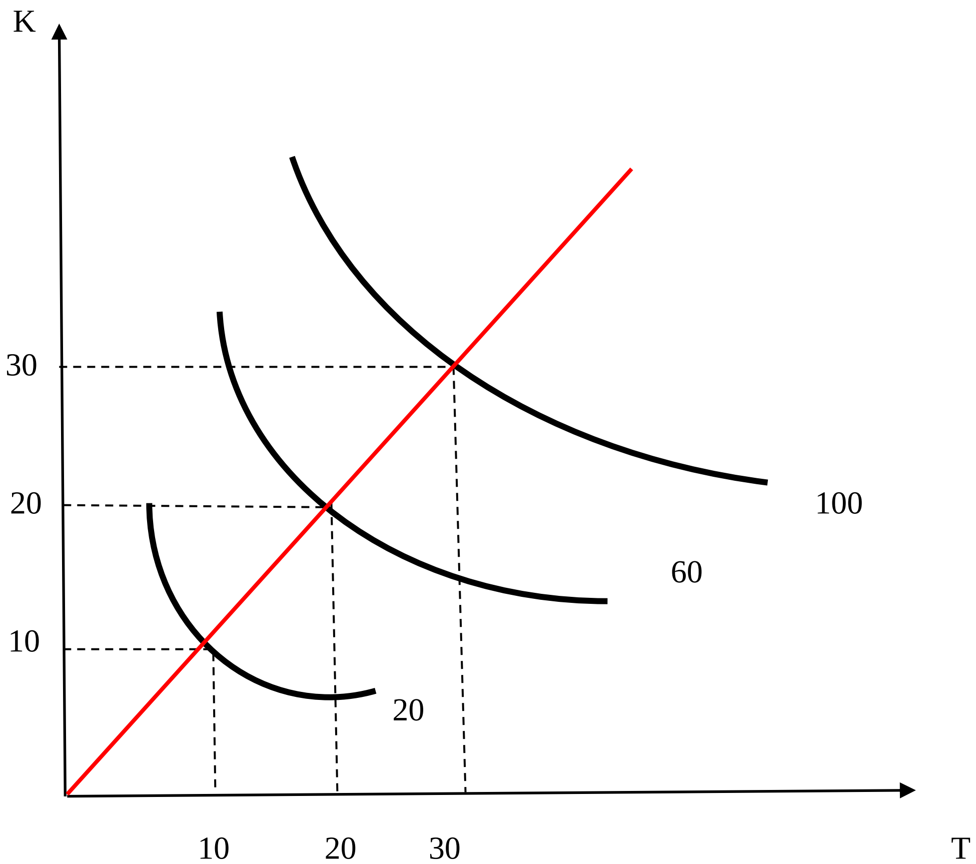
3-7 les rendements d'échelle

3-7-1 propriétés

Les rendements d'échelle constituent la réaction de la production à un accroissement simultané de tous les facteurs de production dans un même rapport. On distingue trois cas possibles :

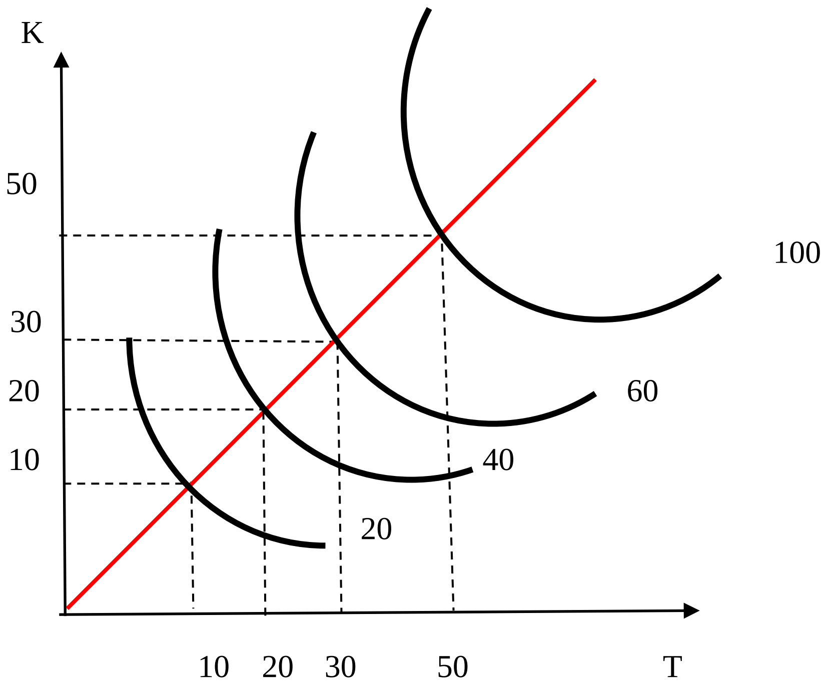
1) <u>Les rendements croissants à l'échelle :</u>

   Dans ce cas, la production s'accroît plus que proportionnelle à l'augmentation des facteurs de production dans un même rapport



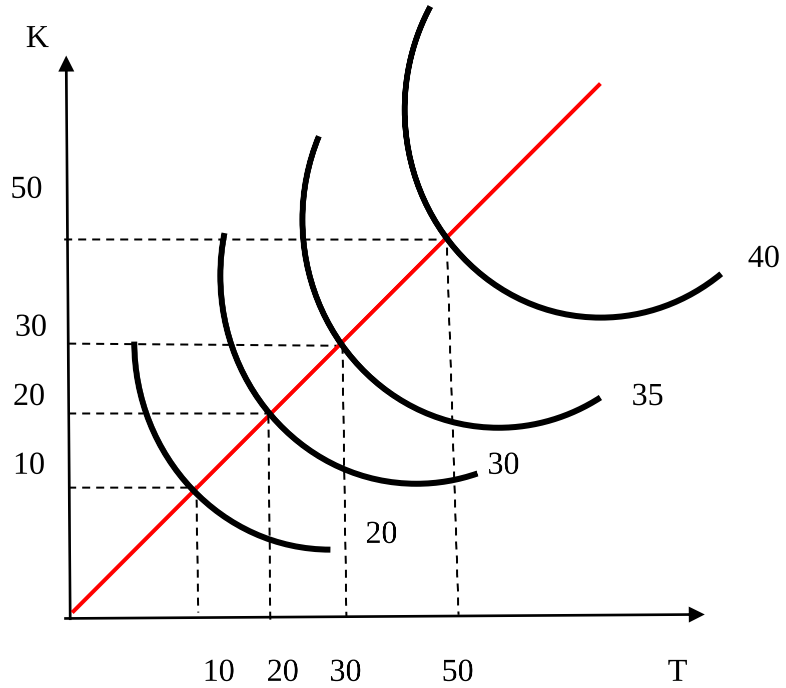
2) <u>Les rendements constants à l'échelle :</u>

Dans ce cas, la production s'accroît d'une manière proportionnelle à l'augmentation des facteurs de production dans un même rapport



3) <u>Les rendements décroissants à l'échelle :</u>

Dans ce cas, la production s'accroît moins que proportionnelle à l'augmentation des facteurs de production dans un même rapport



3-7-2 Homogénéité d'une fonction de production et nature des rendements d'échelle

La fonction de production est dite homogène de degré **r** si en multipliant chacune des variables (les facteurs de production K et T) par un nombre entier positif **n**, la fonction est multipliée par $\mathbf{n^r}$**.**

La signification économique : si dans une entreprise les facteurs de production sont multipliés par **n** fois, la production sera multipliée par $\mathbf{n^r}$ **.**

<u>Propriété :</u>

Une fonction de production est homogène se de degré r si l'on peut établir que

$$\mathbf{f(\lambda K, \lambda T) = \lambda^r. f(K,T)}$$

<u>Exemple :</u>

Soit une fonction de la forme $f(K,T) = T^2 + 4KT + 3K^2$

$f(\lambda K, \lambda T) = \lambda^2 f(K,T)$

La fonction $f(K,T) = T^2 + 4KT + 3K^2$ est donc une fonction homogène de degré 2 (r = 2)

Economiquement, cela signifie que si nous doublons pour cette fonction chacun des facteurs de production K et T, lorsque λ=2, la production se trouve multipliée par 4 c'est-à-dire par $\boldsymbol{\lambda^r}$ ou $\mathbf{(2)^2}$.

D'une manière générale, la nature des rendements d'échelle se détermine selon la valeur du degré d'homogénéité de la fonction de production par rapport à l'unité, trois types de rendement se présentent :

1) **Si r = 1** , la production est multipliée par λ^1 lorsque les facteurs sont multipliés par λ : **les rendements sont constants à l'échelle** ;
2) **Si r > 1** , , la production est multipliée par λ^1 > 1 lorsque les facteurs sont multipliés par λ : **les rendements sont croissants à l'échelle** ;
3) **Si r < 1** , , la production est multipliée par λ^1 < 1 lorsque les facteurs sont multipliés par λ : **les rendements sont décroissants à l'échelle**.

Le degré d'homogénéité de la fonction de production permet donc de déterminer la nature des rendements d'échelle.

3-7-3 l'élasticité par rapport à l'échelle

L'élasticité par rapport à l'échelle sert à mesurer la sensibilité de la production aux variations des quantités de facteurs. Elle égale au rapport de la variation relative de la production aux variations relatives de tous les facteurs de production.

$$\boldsymbol{\varepsilon_{\lambda} = \Delta Q \ \% \ / \ \Delta\lambda \ \%}$$

Avec $\Delta\lambda$ % est le pourcentage de variation des quantités de facteurs.

A partir de la valeur de l'élasticité par rapport à l'échelle, on peut déterminer la nature des rendements à l'échelle, trois cas sont possibles :

1) **Si ε_λ = 1** , **les rendements sont constants à l'échelle** ;
2) **Si ε_λ > 1** , **les rendements sont croissants à l'échelle** ;
3) **Si ε_λ < 1**, **les rendements sont décroissants à l'échelle**.

Exemple :

Supposons une production Q= f (K,T), on a une augmentation simultanée des facteurs de production de 4% et un accroissement de production de 6%.

T A F :

1) Calculer l'élasticité par rapport à l'échelle ;
2) Déduire la nature de rendement à l'échelle

Solution :

1) On a **ε_{λ}= ΔQ % / Δλ % = 6 / 4 = 1,5**

2) Puisque **ε_{λ}= = 1,5 > 1 donc les rendements sont croissants à l'échelle** ;

Exercice de synthèse :

On considère les trois fonctions de production suivantes :

$P_1 = K^a.L^b.T^c$, avec $a+b+c = \sqrt{2}$

$P_2 = \frac{K \, x \, T}{L \, x \, K - L^2}$

$P_3 = 2.L^{0,5} \, K^{0,5}$

K, L et T sont respectivement les facteurs capital, travail et terre.

T.A.F

1/ Déterminer pour chacune de ces fonctions la nature des rendements d'échelle.

2/ On suppose qu'une entreprise retient la fonction de production $P_3 = 2.L^{0,5} \, K^{0,5}$

Sachant que $P_K = 5$ et $P_L = 4$

- Déterminer la combinaison économiquement efficace correspondant à un niveau de production de 10 ;
- Calculer le coût total de cette production ;
- Déterminer l'équation de sentier d'expansion.

Solution :

1 / <u>la nature des rendements d'échelle est donnée par le degré d'homogénéité de chaque fonction de production :</u>

- $P_1 = K^a.L^b.T^c$, avec $a+b+c = \sqrt{2}$

En multipliant les facteurs par une constante positive λ

F (λK, λL, λT) = $\boldsymbol{\lambda^{\sqrt{2}} P_1}$

La production P_1 se trouve multipliée par $\boldsymbol{\lambda^{\sqrt{2}}}$ l'exposant $\sqrt{2} = 1{,}41$ est supérieur à 1, donc la fonction P_1 est homogène de degré supérieur à 1, elle exprime des **rendements d'échelle croissants**

- $P_2 = \frac{K \, x \, T}{L \, x \, K - L^2}$

En multipliant les facteurs par une constante positive λ

F (λK, λL, λT) $= \boldsymbol{\lambda^0 P_2}$

La production P_2 se trouve multipliée par $\boldsymbol{\lambda^0}$, c'est donc une fonction homogène de degré zéro. Elle exprime des rendements d'échelle nuls. C'est le cas des productions extensives qui se caractérisent par le chômage déguisé. Ce dernier se mesure par le nombre d'ouvriers que l'on peut retirer de la production sans réduire cette dernière.

- $P_3 = 2.L^{0,5} K^{0,5}$

  En multipliant les facteurs par une constante positive λ

  F (λK, λL, λT) = $\boldsymbol{\lambda^1 P_3}$

  La production P_3 se trouve multipliée par $\boldsymbol{\lambda^1}$, c'est donc une fonction homogène de degré un. Elle exprime des rendements d'échelle constants.

2/ la combinaison optimale de la fonction de production P_3 avec une production de 10

La combinaison optimale d'un niveau de production égale à 10 est :

K= $2\sqrt{5} \approx$ **4,5 et L=** $5\sqrt{5}\,/2 \approx$ **5,5**

Le coût total de cette production :

CT = $20\sqrt{5} \approx$ **44,72**

3/ l'équation de sentier d'expansion

L'équation de sentier d'expansion est K= 4/5 L